Universidade de São Paulo em São Carlos Lista 6, resolver até 25.3.2016

FCM0114 Eletromagnetismo

Nome:

1. **Integrais de superfície**

Calcule a integral sobre uma superfície fechada
a. do campo $\mathbf{A} = \mathbf{r}$ sobre o cubo $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$ e
b. do campo $\mathbf{A} = \rho \mathbf{E}_\rho$ sobre a superfície radial do cilindro $0 \leq z \leq 1$, $0 \leq \rho \leq 1$.

2. **Integrais de superfície**

Calcule para o campo vetorial $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = c\mathbf{r}$ com $c =$constante a integral de superfície

$$I = \int_F \mathbf{A}(\mathbf{r}) \times d\mathbf{S}$$

a. sobre a superfície de uma esfera (raio R, centro na origem das coordenadas)
b. sobre a superfície de um cilindro (raio R, comprimento L).

3. **Integrais de superfície (T21)**

Prove a relação:

$$t_{ij} \equiv \int_{O(a)} d\mathbf{f} x_i x_j = \frac{4\pi}{3} a^4 \delta_{ij} \ ,$$

onde $i, j = 1, 2, 3$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, e a integral tem que ser calculada sobre a superfície de uma esfera com raio a.

4. **Teorema integral de Gauß**

Sejam a um campo escalar e $\mathbf{B}$ um campo vetorial. Mostre que vale,

$$\int_V d^3\mathbf{r}\ \mathbf{B} \cdot \nabla a = \int_{O(V)} a\mathbf{B}\ \cdot\ d\mathbf{F} - \int_V d^3\mathbf{r}\ a\nabla \cdot \mathbf{B} \ .$$

5. **Teoremas integral de Gauß**

Calcule a integral $\oint_F x(\hat{\mathbf{e}}_x + \hat{\mathbf{e}}_y)\, d\mathbf{F}$, onde F seja a superfície de uma esfera unitária.

6. **Aceleração em coordenadas esféricas**

Em coordenadas esféricas o vetor de velocidade tem a seguinte forma,

$$\vec{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta + \dot{\phi} r \sin\theta \hat{e}_\phi \ .$$

Calcule o vetor de aceleração em coordenadas esféricas. Respeite que os vetores da base também devem ser derivadas pelo tempo.

7. **Elemento de volume em coordenadas curvilíneas**

a. Calcule a superfície de um retângulo com largura a e altura b em coordenadas cartesianas.
b. Calcule a superfície de um disco do raio R em coordenadas polares.
c. Calcule o volume de um cubóide com as dimensões a, b, c em coordenadas cartesianas.
d. Calcule o volume um cilindro com o raio R e altura H em coordenadas cilíndricas.
e. Calcule o volume uma esfera com o raio R em coordenadas esféricas. .6CoordenadasCurvilineas

8. **Volume esférico**

O volume de um corpo é dado pela formula $V = \int_V 1\ dV$.
a. Calcule o volume de uma esfera em 3D em coordenadas esféricas.
Pela lei integral de Gauß podemos estabelecer uma relação entre o volume da esfera e a sua superfície. (**Ajuda:** Para qual campo vetorial $\mathbf{A}$ vale: $\nabla \cdot \mathbf{A} = 1$?)
b. Agora calcule o volume da esfera neste sentido. Pode assumir, que a superfície da esfera é conhecida.
c. Derive analogamente à formula acima uma relação geral entre o volume de uma hiperesfera n-dimensional e a sua hipersuperfície $(n-1)$-dimensional. **Ajuda:** A lei de Gauß vale em dimensões arbitrárias com o operador nabla n-dimensional definido por, $\nabla = (\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n)$.

9. **Volume esférico**

A distribuição de densidade de um gás seja dada por $n(\mathbf{r}) = C^2 - \frac{x^2}{r_0^2} - \frac{y^2}{r_0^2} - \frac{z^2}{r_0^2}$. Determine a constante C de tal maneira, que densidade $n(\mathbf{r})$ fica normalizada ao número de átomos no gás, isto é, $\int_{\mathcal{V}} n(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = N$, onde $\mathcal{V}$ é o volume dentro do qual a densidade é positiva, $n(\mathbf{r}) \geq 0$.